

Séquence 8 – Calcul littéral

Objectifs

1. Revoir les notions de variable, d' inconnue
2. Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d' équation
3. Utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général
4. Développer des expressions algébriques dans des cas très simples : $a(b+c)=ab+ac$
5. Réduire des expressions algébriques
6. Factorisation : $ab+ac = a(b+c)$
7. Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines)

François Viète - Français (1540 ; 1603)



François Viète est né à Fontenay-Le-Comte en Vendée. Il devient avocat au parlement de Paris puis conseiller au parlement de Rennes.

Il se consacre aux mathématiques pour le plaisir qu'il prend comme un loisir. Il est considéré aujourd'hui comme l'un des plus grands mathématiciens de son temps.

Il publie un ouvrage de trigonométrie où il présente de nombreuses formules de cosinus et sinus qui permettent de simplifier les calculs, ainsi que des tables trigonométriques.

Il devient conseiller privé d'Henri IV. Il est chargé de décrypter les messages secrets interceptés que s'envoient les espagnols. Il y arrive systématiquement ce qui provoque l'exaspération de ses ennemis qui finissent par l'accuser de sorcellerie et le dénoncer au pape.

Le calcul littéral trouve ses bases dans le but de résoudre tout problème. La notion d'équations y est longuement développée.

François Viète restera au côté d'Henri IV jusqu'en 1602 pour s'éteindre un an plus tard à Paris.

I. Qu'est-ce qu'une expression littérale ?

A. Définition

Une expression littérale est une expression dans laquelle

.....

Si une expression contient plusieurs fois la même lettre, alors

.....

Exemple 1

Le périmètre d'un carré de côté 3 cm nous donne : $P=4\times 3=12\text{ cm}$

Le périmètre d'un carré de côté x cm nous donne : $P=4\times x$

Exemple 2

J'achète 4 pains au chocolat à 0,80 €, je paye : $S=4\times 0,80=3,20\text{€}$

J'achète x pains au chocolat à 0,80 €, je paye : $S=x\times 0,80=0,80\times x$

Une expression littérale permet donc

.....

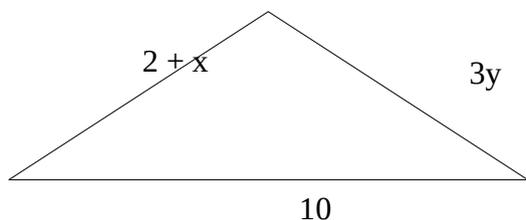
Exemple 3

Exprimer un programme de calcul :

- Choisir un nombre	x
- Ajouter 3	$x+3$
- Multiplier le résultat par 6	$6\times(x+3)$

Exemple 4 :

Généraliser un problème



Le périmètre du triangle est :

$$2+x+3\times y+10=x+3\times y+12$$

B. Simplification d'écriture.

On peut supprimer le signe « \times » entre :

- deux lettres :
- un nombre et une lettre :
- un nombre ou une lettre et une parenthèse :
- deux parenthèses :

C. Calculer une valeur numérique.

Quand on donne une valeur numérique à ces lettres,

.....

Exemple :

Calculer l'expression $3a+ab$ pour $a=-2$ et $b=5$.

$$\begin{aligned} 3 \times (-2) + (-2) \times 5 & \ll \text{ On remplace a et b par leurs valeurs respectives } \gg \\ = -6 - 10 & \ll \text{ On effectue les calculs en respectant les opérateurs } \gg \\ = -16 \end{aligned}$$

II. Développer des expressions algébriques.

Définition

Développer un produit, c'est le transformer

Propriété de la simple distributivité :

k , a et b désignent des nombres :

$$\begin{aligned} k(a+b) &= ka+kb \\ k(a-b) &= ka-kb \end{aligned}$$

Exemples

$$A = 5(-2x+4)$$

$$A = 5 \times (-2x) + 5 \times 4$$

$$A = -10x + 20$$

$$B = -x(5x-6)$$

$$B = -x \times 5x - x \times (-6)$$

$$B = -5x^2 + 6x$$

III. Réduire une expression littérale.

A. Réduire un somme.

Définition

Réduire une somme, c'est tout simplement

.....

Exemples

$$11x + 6x = (11+6)x = 17x$$

$$7x^2 - 3x^2 = (7-3)x^2 = 4x^2$$

B. Réduire un produit.

Propriété

Pour simplifier un produit,

Exemples

$$\begin{aligned} 4x \times 2x &= 4 \times x \times 2 \times x \\ &= 4 \times 2 \times x \times x \\ &= 8x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5(-4x) &= -5 \times (-4x) \\ &= -5 \times (-4) \times x \\ &= 20x \end{aligned}$$

C. Suppression de parenthèses.

Règles

Lorsque l'on supprime des parenthèses :

- précédées d'un signe +, :
 $a+(b-c+d)=a+b-c+d$
- précédées d'un signe -, :
 $a-(b-c+d)=a-b+c-d$

Exemples

$$4x+(11x+5)=4x+11x+5$$

$$8x+(9-7x)=8x+9-7x$$

$$6+2x-(5x-7+3x^2)=6+2x-5x+7-3x^2$$

D. Réduire une expression littérale.

Dans une expression littérale, on ne peut

« $5x^2+3x+(4x-2)-(x^2+1)$ » est une expression littérale.

« x » représente un nombre quelconque. C'est une variable.

On peut la réduire, c'est à dire

.....

Exemple

1- On supprime les parenthèses :

$$A=5x^2+3x+4(4x-2)-(x^2+1)$$

2- On regroupe les termes "en x^2 ", les termes "en x " et les "constantes" :

$$A=5x^2+3x+16x-8-x^2-1$$

3- On factorise les termes "en x^2 ", les termes "en x " et les "constantes" :

$$A=5x^2-x^2+3x+16x-8-1$$

4- On réduit :

$$A=(5-1)x^2+(3+16)x-8-1$$

$$A=4x^2+19x-9$$

IV. Factorisation : $ab+ac = a(b+c)$

La factorisation transforme une somme/différence en un produit (c'est l'inverse du développement).

Pour factoriser une expression, il faut trouver un facteur commun.



SOMME, DIFFERENCE		PRODUIT
$ka+kb$	=	$k(a+b)$
$ka-kb$	=	$k(a-b)$

k est le facteur commun.

Exemples :

- Factorisation de $2x+3x^2$
 $2x+3x^2=2\times x+3x\times x$
 $=x(2+3x)$
- Factorisation de $4a-4$
 $4a-4=4\times a-4\times 1$
 $=4(a-1)$