

Séquence 6 – Puissances d'un nombre

Objectifs

1. Définition des puissances d'un nombre (exposants entiers, positifs).
2. Effectuer des calculs numériques simples impliquant des puissances
3. Effectuer des calculs numériques simples en utilisant la notation scientifique.
4. Effectuer des calculs numériques en utilisant les puissances de 10 d'exposant entier positif
5. Connaître les bases de calcul en utilisant les exposants négatifs



René Descartes - Français (1596 ; 1650)

René Descartes est né en 1596. Il sera élevé par sa grand-mère car sa mère mourut peu de temps après sa naissance.

Son père ne participe guère à son éducation mais lui assure une existence aisée.

A l'âge de 8 ans, il entre au collège de la Flèche. En 1614, il part poursuivre ses études à Paris. A 20 ans, il accède à la faculté de Poitiers pour y étudier le Droit.

En 1617, Descartes s'engage dans l'armée. Mais il n'est pas un bon soldat et, de santé fragile, il doit vite se retirer.

De 1629 à 1633, Descartes écrit "Le Monde", un ouvrage qui lui apportera quelques déboires avec l'Eglise. Il y présente une théorie physique de l'Univers et affirme pouvoir démontrer scientifiquement

l'existence de Dieu.

En 1637, il publie un livre sur "Les problèmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles et des lignes droites". Descartes présente en particulier des constructions à la règle et au compas de la multiplication et de la division.

La même année, il publie Le Discours de la Méthode dans lequel il explique les Règles pour la conduite de l'esprit humain.

Cette méthode repose sur quatre principes :

« Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle .

Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.

Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusqu'à la connaissance des plus composés .

Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre. »

En 1650, à Stockholm, invité par la Reine Christine, il meurt d'une infection pulmonaire.

C'est lui qui met en place les notations modernes que nous connaissons en algèbre, comme par exemple l'exposant pour les puissances.

I. Exposant entier positif a^n .

$$a^n = a \times a \times \dots \times a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \dots \times a} \text{ avec } a \text{ non nul}$$

a^n se lit « » ou « »

Exemples :

2^5 signifie $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ et se lit « » ou « »

$(-5)^3$ signifie $(-5) \times (-5) \times (-5)$ et se lit « » ou «

..... » ou « »

8^2 signifie 8×8 et se lit « » ou « » ou

« »

A savoir :

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

Exemples :

$$33^1 = 33$$

$$456^0 = 1$$

II. Les puissances de 10

Définition :

n désigne un nombre entier différent de 0.

10^n

$$10^n = 10 \times 10 \times \dots \times 10 = 100 \dots 0$$

10^n se lit « »

Par convention :

$$10^0 = 1$$

$$10^1 = 10$$

Exemples :

10^0	10^1	10^2	10^3	10^6	10^9
1	10	100	1000	1000000	1000000000

Règles de calcul

Ne pas confondre puissance et produit !! :

$$4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \quad \text{et} \quad 4 \times 3 = 12$$

Règles de priorités :

Dans un calcul, on effectue dans l'ordre :

1. les calculs entre parenthèses
2. les puissances
3. les multiplications et les divisions
4. les additions et soustractions

Exemples :

$$A = 5 - 4 \times 2^3 + 1$$

$$A = 5 - 4 \times 8 + 1$$

$$A = 5 - 32 + 1$$

$$A = -26$$

Attention aux signes !!

S'il n'y a pas de parenthèse, un exposant ne s'applique qu'à ce qui le précède immédiatement.

$$-4^2 = -4 \times 4 = -16$$

$$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$$

Signe d'une puissance.

- Toute puissance d'un nombre positif est
- Toute puissance d'un nombre négatif est un nombre :
 -
 -

Exemples :

$$(+2)^5 = (+2) \times (+2) \times (+2) \times (+2) \times (+2) = +32$$

$$(-2)^5 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = -32$$

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = +16$$

Règles de calculs :

Soient m et n deux entiers relatifs :

$$a^n \times a^m = a^{n+m} \quad \text{on additionne les exposants}$$

$$(a^n)^m = a^{n \times m} \quad \text{on multiplie les exposants}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n \quad \text{on distribue l'exposant}$$

Exemples :

$$8^2 \times 8^5 = 8^{(2+5)} = 8^7$$

$$(2^2)^3 = 2^6$$

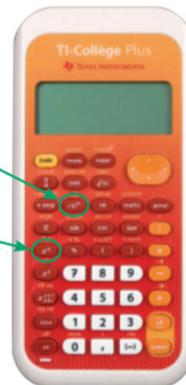
$$2^2 \times 3^2 = 6^2$$



Permet de multiplier par une puissance de 10.

Permet de calculer la puissance d'un nombre.

Permet de multiplier par une puissance de 10.



Casio Collège 2D +	TI-Collège Plus
EXEMPLE : Calculer $(-5)^7$.	
<ul style="list-style-type: none"> Taper la séquence suivante : 	<ul style="list-style-type: none"> Taper la séquence suivante :
<ul style="list-style-type: none"> On obtient à l'écran : 	<ul style="list-style-type: none"> On obtient à l'écran :
Donc $(-5)^7 = -78\,125$.	Donc $(-5)^7 = -78\,125$.

III. Exposants entiers négatifs

$$a^n = a \times a \times \dots \times a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a \times a \times \dots \times a} \text{ avec } a \text{ non nul}$$

Exemples :

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Règles de calculs :

Soient m et n deux entiers relatifs

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \dots\dots\dots$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \dots\dots\dots$$

Exemples :

$$\frac{(-3)^2}{(-3)^5} = (-3)^{(2-5)} = (-3)^{(-3)}$$

$$\frac{4^7}{4^{(-2)}} = 4^{(7-(-2))} = 4^9$$

$$\frac{56^2}{7^2} = \left(\frac{56}{7}\right)^2 = 8^2 = 64$$

10^{-4} 10^{-3} 10^{-2} 10^{-1} 10^0

0,0001	0,001	0,01	0,1	1
--------	-------	------	-----	---

IV. Notation scientifique d'un nombre

Un nombre décimal peut s'écrire de différentes façons sous la forme $a \times 10^p$ où a est un nombre décimal et p est un entier relatif.

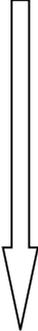
Définition :

L'écriture scientifique d'un nombre telle que :

- a est un nombre
- p est un

Exemple :

Le nombre 1 234,5 peut s'écrire :

$12\ 345 \times 10^{-1}$ $1\ 234,5 \times 1$ $123,45 \times 10^1$ $12,345 \times 10^2$ $1,2345 \times 10^3 \leftarrow$ $0,12345 \times 10^4$	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> NOTATION SCIENTIFIQUE de 1 234,5 </div>		a diminue et n augmente		a augmente et n diminue
---	---	--	-------------------------------	--	-------------------------------

Exemple :

Le nombre 2569,8 peut s'écrire : $25\ 689 \times 10^{-1}$ ou $0,25698 \times 10^4$ ou ...

Son écriture scientifique est $2,5698 \times 10^3$.

V. LES PREFIXES DE NANO A GIGA

Les préfixes suivant sont à connaître :

Préfixe	Puissance	Symbole	En décimale
nano	10^{-9}	n	0,000 000 001
micro	10^{-6}	μ	0,000 001
milli	10^{-3}	m	0,001
centi	10^{-2}	c	0,01
déci	10^{-1}	d	0,1
L'unité			
déca	10^1	da	10
hecto	10^2	h	100
kilo	10^3	k	1 000
méga	10^6	M	1 000 000
giga	10^9	G	1 000 000 000

Exemples :

$$1 \text{ GW} = 10^9 \text{ W}$$

$$5 \text{ nm} = 5 \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$7 \text{ mg} = 7 \times 10^{-3} \text{ g}$$