Séquence 11 – Les longueurs dans le triangle et le théorème de Thalès

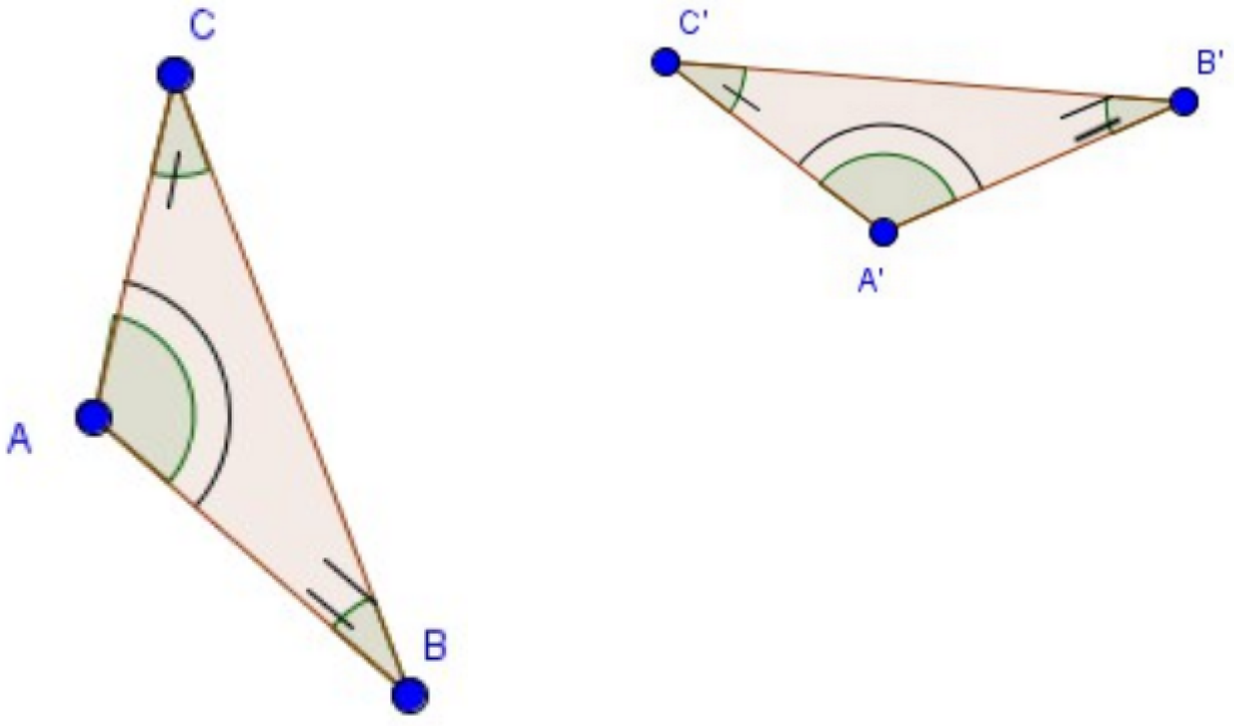
Objectifs
1. Construire des triangles de mesures données (trois longueurs, une longueur et deux angles, deux longueurs et un angle) 2. Utiliser les cas d’ égalité des triangles pour résoudre des problèmes. 3. Résoudre des problèmes de géométrie plane à l'aide du Théorème de Thalès 4. Résoudre des problèmes de géométrie plane à l'aide de la réciproque du théorème de Thalès 5. valider ou réfuter une conjecture à l'aide du Théorème de Thalès ou de sa réciproque 6. Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.

Banque exercices n° 1
Banque exercices n° 2
Banque exercices n° 3
P. 217 Activité 3

I. Triangles égaux

Définition:

Des triangles égaux sont des triangles superposables,c'est-à-dire que leurs côtés sont deux à deux de même longueur et leurs angles sont deux à deux de même mesure.Exemple: Les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.



On a:

$$AB=A'B' \quad ; \quad AC=A'C' \quad \text{et} \quad BC=B'C'$$

$$\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'} \quad ; \quad \widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'} \quad \text{et} \quad \widehat{BCA}=\widehat{B'C'A'}$$

Propriétés :

Si deux triangles ont	un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure	alors ces deux triangles sont égaux.
	un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur	
	leurs côtés deux à deux de même longueur	

Exemple :

On sait que : $AB=A'B'$; $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$

Or: Si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles de même mesure alors ces deux triangles sont égaux.

Donc: Les triangles ABC et A'B'C' sont égaux.

Banque exercices n° 4

Banque exercices n° 5

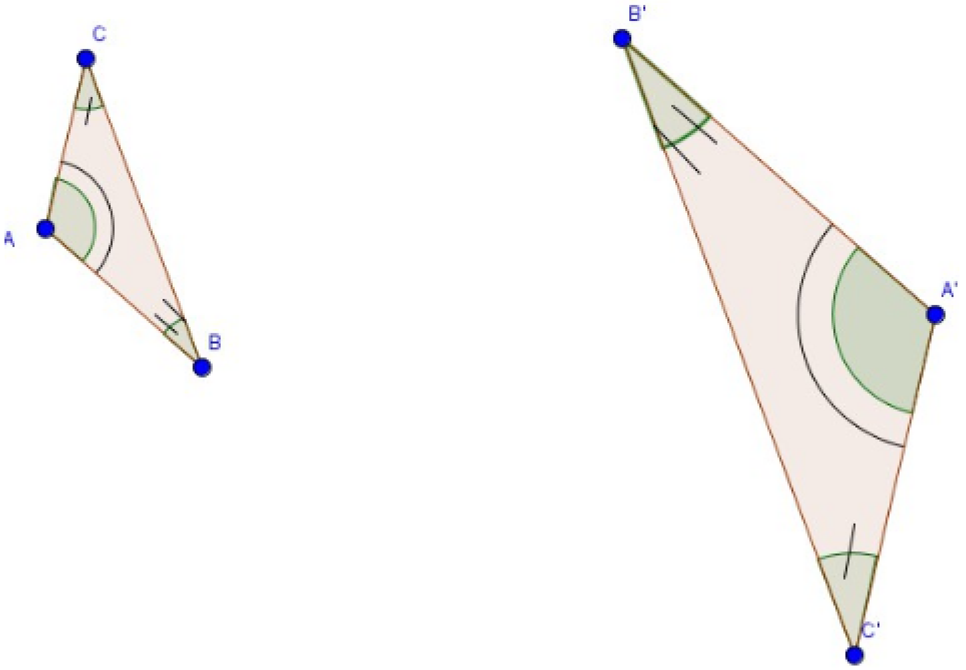
Banque exercices n° 6

II. Triangles semblables

A. Angles

Définition:

Des triangles semblables sont des triangles dont les angles sont deux à deux de même mesure.



Remarque :

Des triangles égaux sont semblables mais des triangles semblables ne sont pas forcément égaux.

Propriété :

Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ces deux triangles sont semblables.

Exemple :

On sait que $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$

Or Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure,
alors ces deux triangles sont semblables.

Donc: les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

B. Longueurs

Propriété :

Si deux triangles sont semblables alors les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Exemple :

Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables donc les longueurs des côtés du triangle A'B'C' sont proportionnelles aux longueurs des côtés du triangle ABC.

Longueurs du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueurs du triangle A'B'C'	A'B'	A'C'	B'C'

× k

Le tableau est un tableau de proportionnalité et k est le coefficient de proportionnalité.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$$

Propriété :

Si les longueurs des côtés de deux triangles sont proportionnelles alors ces triangles sont semblables.

Exemple :

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=2$$

Donc les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables et $\widehat{BAC}=\widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$ $\widehat{BCA}=\widehat{B'C'A'}$

Banque exercices n° 8

Banque exercices n° 7

Banque exercices n° 9

Activité TICE - Géogébra : Découvrir le théorème de Thalès

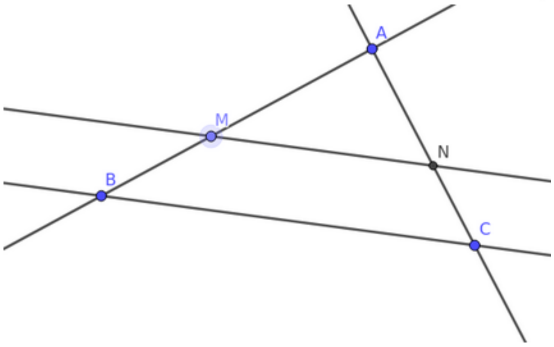
III. Théorème de Thalès

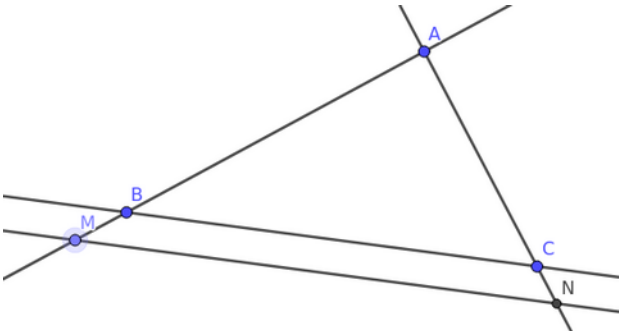
Soient deux droites (AB) et (AC) deux droites sécantes.

Soient M un point de la droite (AB) et N un point de la droite (AC).

Si les droites (MN) et (BC) sont parallèles

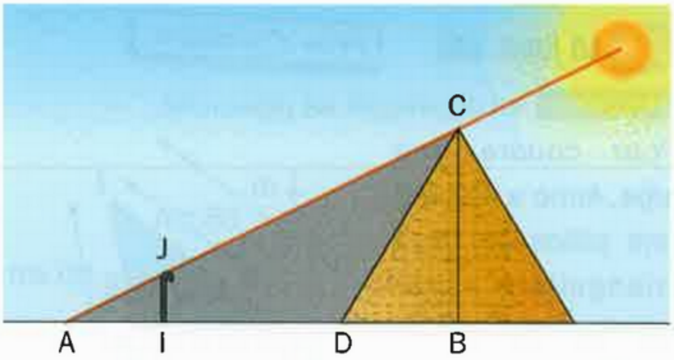
Alors $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}=\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{BC}}$





A. Application – Calcul d'une longueur

Selon la légende, lors d'une journée ensoleillée, Thalès plaça sa canne de sorte que son ombre coïncide avec celle de la pyramide de Khéops, comme sur le dessin suivant.



Il connaissait les mesures suivantes : IJ = 90 cm, DB = 116 m, IA = 1,9 m et ID = 201 m.

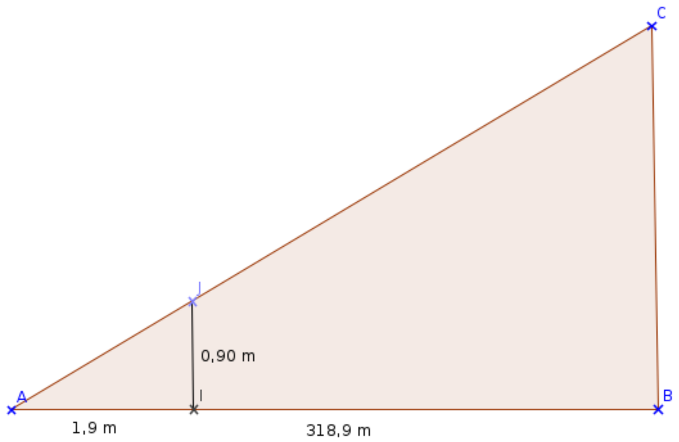
▶ Déterminer la hauteur de la pyramide de Khéops comme l'a fait Thalès.

INFO !

Thalès de Milet (VIe siècle av. J.-C.) était un mathématicien, astronome et philosophe grec. Il devint célèbre en prédisant l'éclipse de Soleil de 585 av. J.-C.

$AB = AI + ID + DB = 1{,}9 + 201 + 116 = 318{,}9\,m$

Voici un schéma de la situation :



On sait que :

Les droites (AC) et (AB) sont sécantes en A.

Les droites (BC) et (IJ) sont parallèles.

Tous les pts doivent apparaître.

D'après le théorème de Thalès, on a :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} = \frac{IJ}{BC}$$

$$\frac{1{,}9}{318{,}9} = \frac{AJ}{AC} = \frac{0{,}90}{BC}$$

Donc :

$$\frac{1{,}9}{318{,}9} = \frac{0{,}90}{BC}$$

C'est une situation de proportionnalité, je peux faire une 4e de proportionnel.

D'où

$$BC = \frac{318{,}9 \times 0{,}90}{1{,}9}$$

$$BC = 151$$

La hauteur de la pyramide est de 151 m.

Banque exercices n°10

Banque exercices n°11

Banque exercices n°12

Banque exercices n°13

Devoir Maison : Activité extérieure – Utiliser le théorème de Thalès pour mesurer quelque chose de haut.

IV. Réciproque du théorème de Thalès

Soient deux droites (AB) et (AC) non confondues.

Soient M un point de la droite (AB) et N un point de (AC)

Si les points A,B,M et A,C,N sont alignés dans le même ordre et si $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

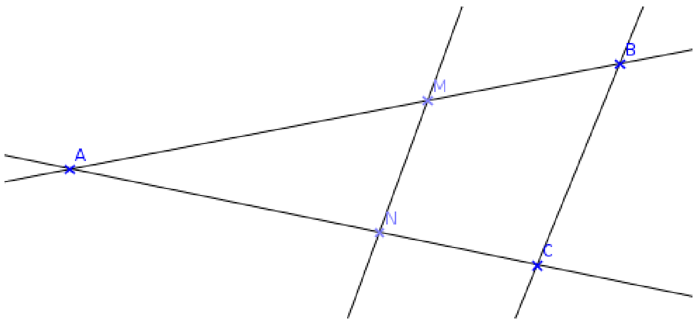
La réciproque du théorème de Thalès permet de démontrer que deux droites sont parallèles.

A. Application réciproque du théorème de Thalès – Démontrer que 2 droites sont parallèles

AB = 4,4 cm AC = 3,6 cm

AM = 3,3 cm AN = 2,7 cm

Les droites (MN) et (BC) sont-elles parallèles ?



d'une part : $\frac{AM}{AB}=\frac{3,3}{4,4}=\frac{33}{44}=\frac{3}{4}$

d'autre part : $\frac{AN}{AC}=\frac{2,7}{3,6}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$

donc $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$

De plus,

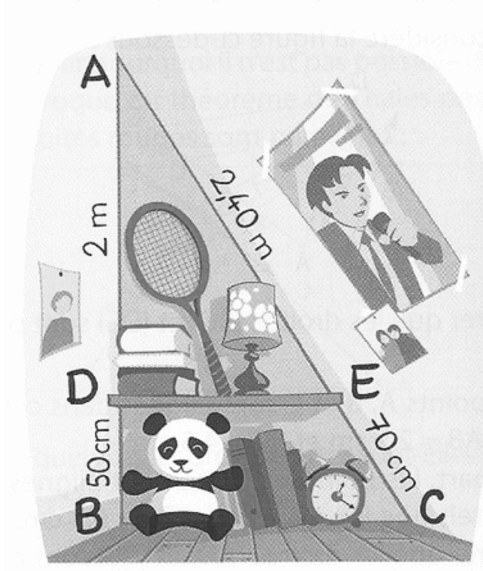
Les points A,M,B et sont alignés dans le même ordre que les points A,N,C

D’après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Banque exercices n°14

B. Application réciproque du théorème de Thalès – Démontrer que 2 droites ne sont pas parallèles

L'étagère est-elle parallèle au sol ?



Les droites (BD) et (CE) sont sécantes en A.

d'une part : $\frac{AD}{AB}=\frac{200}{250}=\frac{4}{5}=0{,}8$

D'autre part : $\frac{AE}{AC}=\frac{240}{310}=\frac{24}{31}\neq 0{,}8$

On a : $\frac{AD}{AB}\neq\frac{AE}{AC}$

Donc les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles. (Si elles l'étaient, il y aurait égalité)

L'étagère n'est pas parallèle au sol.

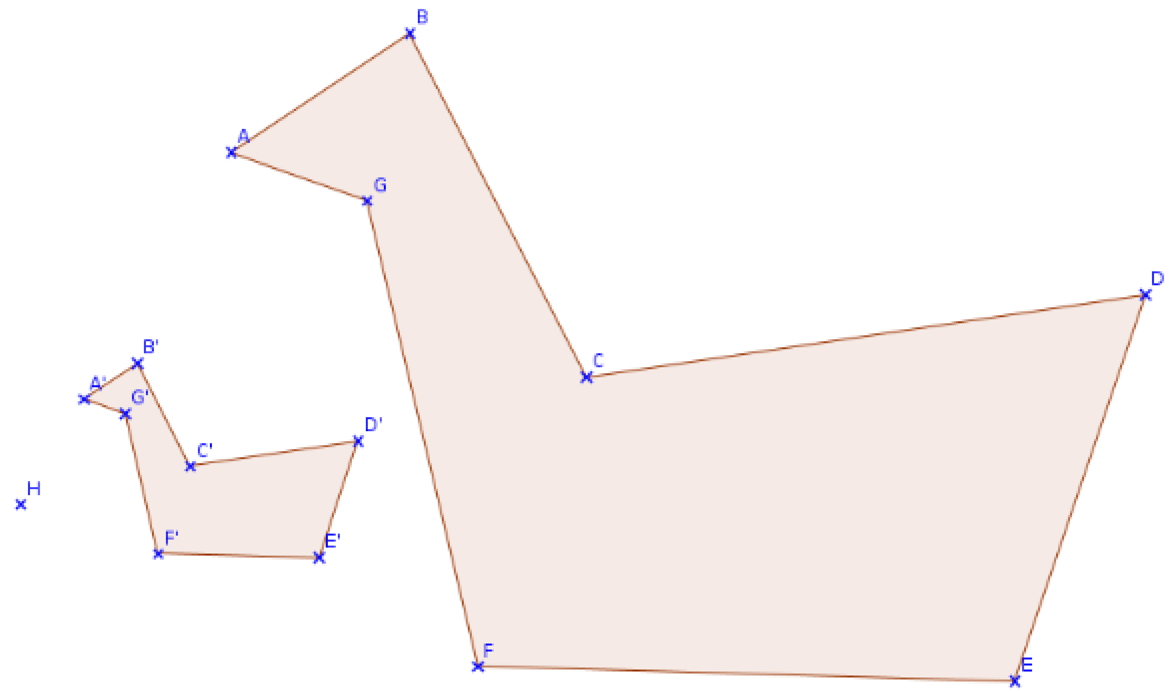
Banque exercices n°15

Banque exercices n°16

Les maths en folie – La belle à la tour P. 38

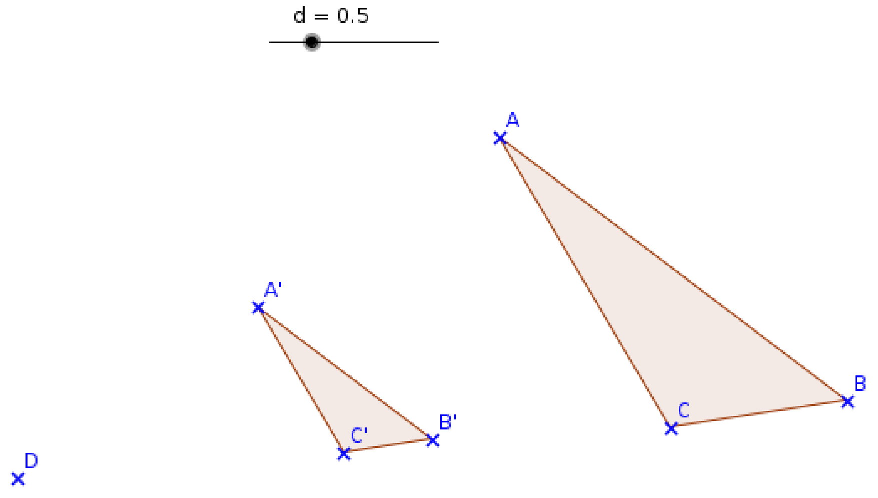
Démonstration classe entière avec Géogébra :

1. Exemple quelconque

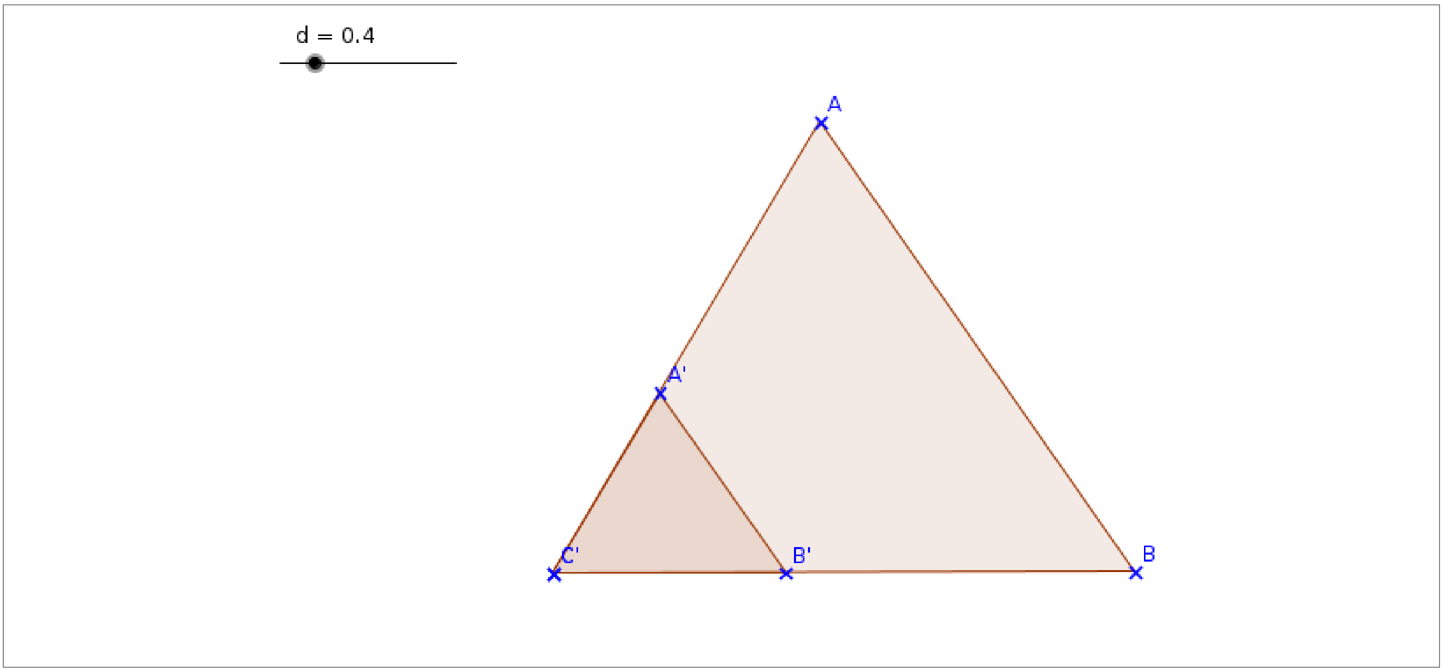


- Mettre en avant la proportionnalité entre deux longueurs (AB et A’B’ proportionnels mais aussi HA et HA’ mais aussi tous les autres)
- Demande à la classe : Donnez-moi 2 longueurs proportionnelles.
- Parler de coefficient de proportionnalité, rapport $\frac{AB}{A'B'}$, $\frac{HA}{HA'}$, ...

2. Exemple avec un triangle



3. Exemple avec centre homothétie correspondant à un des points du triangle


d = 0.4
A
A'
C'
B'
B